圆周率日又将来临 而我们仍不知道圆周率是否正规

David H. Bailey　Jonathan Borwein

摘要　π 的数字从一开始就引起了公众和研究数学家的兴趣. 本文简要回顾了这一古老常数的历史, 然后就 π 是否正规这一问题叙述一些最近的研究, 或者换句话说, 这个问题也就是, 在特定的意义下, π 的数字在统计学上是否是随机的.

1. 现代大众文化中的圆周率及其节日

数 π, 在数学常数的众神中是独一无二的, 它能够令专业数学家和公众同时着迷. 如像 $\sqrt{2}$ 这样的代数常数更容易被解释和计算至高精确度 (比如使用简单的 Newton (牛顿) 迭代法). 常数 e 在物理学和化学中普遍存在, 甚至出现在金融数学中, 对数在社会科学中也无处不在, 但它们都没有在大众文化中获得许多关注.

相比之下, 我们处处都见到 π. 在 Ang Lee (李安) 执导的一部改编自 Yann Martel 的获奖小说《少年派的奇幻漂流 (The life of Pi)》的 2012 年的同名电影中, 主人公 Piscine Molitor ("派 (Pi)") 在黑板上写下了 π 的 10 进制展开的许多位, 给老师和同学留下了深刻印象, 他还吟诵了每一位数字.[1] 数 π 甚至导致了滑稽的想象, 比如 2013 年 Scott Hilburn 的卡通《派的妻子 (Wife of Pi)》, 描述了一个 4 的形象坐在一个 π 形象的旁边, 对他们的婚姻顾问说 "他太无理了, 没完没了的."[22].

每年 3 月 14 日庆祝 "圆周率日 (Pi Day)" 的时候, π 尤其引起人们的关注, 在美国书写时习惯于把日子置于月份之后, 这样 3/14 就对应着圆周率的众所周知的 10 进制近似值 (3/14/15 意味着 2015 年 3 月 14 日将有一个盛大活动). 圆周率日始于 1988 年, 是旧金山探索馆 (一个科学博物馆) 的 Larry Shaw 的一个点子, 此探索馆是 Frank Oppenheimer (奥本海默) (著名物理学家 Robert Oppenheimer 的弟弟, 也是一位物理学家) 在被美国政府于麦卡锡时代列入黑名单之后创建的.

起初是人们带着滑稽帽子拿着馅饼类的东西在探索馆周围行走时所说的一个轻松玩

译自: The Amer. Math. Monthly, Vol.121 (2014), No.3, p.191–206, Pi Day Is Upon Us Again and We Still Do Not Know if Pi Is Normal, David H. Bailey and Jonathan Borwein, figure number 8.

David H. Bailey 在 Lawrence Berkeley National Laboratory 工作了 15 年后于 2013 年 6 月退休, 目前为戴维斯加州大学的研究员. 他著名的文章 (合作者是 Peter Borwein 和 Simon Plouffe) 之一描述了什么是圆周率的 "BBP" 公式. 他的邮箱地址是 DHBailey@lbl.gov.

Jonathan Borwein 是澳大利亚新南威尔士州的 University of Newcastle 的一位桂冠数学教授. 他的邮箱地址是 jonathan.borwein@newcastle.edu.au.

1) 在小说中令派感到满意的是他画了一个直径为单位长的圆.—— 原注

笑；而在世纪之交，圆周率日成为了北美学校的一个主要的教育活动日，这引发了大量的新闻报道.[1] 到了 2009 年，美国众议院将圆周率日的庆祝官方化，他们通过了一项决议，把 3 月 14 日定为 "国家圆周率日"，并鼓励 "学校和教育工作者在这一天组织适当的活动，来教给学生关于圆周率的知识并引起他们对学习数学的兴趣." [23].[2]

一个突出的例子是，2007 年 3 月 14 日《纽约时报 (New York Times)》的一个填字游戏给出了一些提示，在许多位置，π (代表 PI) 必定出现在两个单词的交汇处. 例如，33 横向的 "Hubert 之后的副总统" (答案：SπRO) 与 34 纵向的 "母火 (stove feature)" (答案：πLOT)[3] 相交. 事实上，28 纵向的线索 "3 月 14 日，对于数学家" 恰如其分地描述了 PIDAY，而 PIPPIN 这时是一个 4 字词. 经许可，这个填字游戏及其答案被重印在 [15, p. 312–313] 中.

a. 大众文化中对 π 的热衷

许多事例在 [14] 中给出，它们包含了如下事件：

1. 2012 年 9 月 12 日，作为壮观而昂贵的 圆周率表演 艺术的一部分，5 架装备了点阵式空中文字技术的飞机在旧金山湾的上空写下了 π 的 1000 位数字.
2. 2012 年 3 月 14 日，美国地方法院法官 Michael H. Simon 通过裁定 "圆周率是非版权保护的事实"，驳回了一项关于一首歌的歌词的版权侵权诉讼.
3. 在 2005 年 9 月 20 日的北美电视智力竞赛节目 "危险 (Jeopardy)!" 的 "用数字" 环节中，提示是 " 'How I want a drink, alcoholic of course'[4] 被通常用来记住它." (答案：圆周率是什么？).
4. 2004 年 8 月 18 日，谷歌在其股票上市时，[5] 发行了 14,159,265 股名为 "new slices of rich technology" 的股票. 2013 年 1 月 29 日，他们提供 π 百万美元来奖励成功侵入一个指定的 Android (安卓) 手机上的 Chrome 操作系统 [6] 的人.
5. 在 1999 年的电影《黑客帝国 (Matrix)》第一部中，主角 Neo 仅有 314 秒进入万物之源. 《时代 (time)》杂志注意到这里的时间与 π 数字的相似性.
6. 1998 年的惊悚片《死亡密码 (Pi)》因其剧本在 Sundance (圣丹斯) 电影节上获奖. 而本文作者访问了其网站，认为这个剧本是个十足的恶作剧.
7. 1993 年 5 月 6 日版的《辛普森一家 (The Simpsons)》，设计让 Apu 宣称 "我可以背诵圆周率到 40,000 位. 最后一位数字是 1." 这个数字是由本文作者之一提供给编剧的.
8. 在 Carl Sagan 1986 年的书《接触 (Contact)》中，主人公 (在电影中由 Jodie Foster

1) 尝试 www.google.com/trends?q=Pi+ 查看对圆周率兴趣的季节性.—— 原注
2) 这似乎是由政府批准的关于圆周率的第一项立法，其实在 19 世纪末印第安纳州就差点通过立法来认可圆周率的价值了，见 [12, Singmaster, Entry 27] 和 [14]. 这份月刊在此次事件中也扮演了奇特的角色.—— 原注
3) pilot (light) 的含义为 "(点燃大煤气灯之) 点火苗"，与 "母火" 相合.—— 校注
4) 注意，这句句子中每个词的字母数依次是 31415926. 该问题的答案应为圆周率.—— 校注
5) 原文把 2004 年 8 月 18 日谷歌股票上市日误为 2005 年 8 月 18 日.—— 校注
6) 两者均由谷歌开发.—— 校注

扮演) 寻找了 π 的数字的规律，在神秘的经历之后她在 π 的基-11 展开中继续求证这些规律.

关于上述第 3 项，通俗出版物 [12, 14] 中有许多这样的 "圆周率记忆法" 或者 "圆周率诗 (piems)" (即这样的习语或者诗歌，忽略标点，计算其字母数可以得到 π 的数字). 类似的还有 "Sir, I bear a rhyme excelling / In mystic force and magic spelling / Celestial sprites elucidate / All my own striving can't relate." [13, p. 106]. 有些圆周率诗会很长 [12, Keith, Entry 59, p. 560–561].

对 π 的关注有时是恼人的，比如 2012 年 8 月 14 日美国人口普查局宣布本国的人口已恰好超过 314,159,265. 这样的精确度当然是毫无道理的. 而有时候对 π 关注却是令人惊喜的. [1),2)]

b. 诗与圆周率诗的比较

圆周率诗虽然令人开心，但它们通常是打油诗. 为纠正这样的看法，我们收录一些优秀的 π 的诗和歌曲的例子. [3)] 图 1 是曾多次被收入选集的诗 "PI"，它是由曾获得 1996 年

The admirable number pi:
three point one four one.
All the following digits are also just a start,
five nine two because it never ends.
It can't be grasped, six five three five, at a glance,
eight nine, by calculation,
seven nine, through imagination,
or even three two three eight in jest, or by comparison
four six to anything
two six four three in the world.
The longest snake on earth ends at thirty-odd feet.
Same goes for fairy tale snakes, though they make it a little longer.
The caravan of digits that is pi
does not stop at the edge of the page,
but runs off the table and into the air,
over the wall, a leaf, a bird's nest, the clouds, straight into the sky,
through all the bloatedness and bottomlessness.
Oh how short, all but mouse-like is the comet's tail!
How frail is a ray of starlight, bending in any old space!
Meanwhile two three fifteen three hundred nineteen
my phone number your shirt size
the year nineteen hundred and seventy-three sixth floor
number of inhabitants sixty-five cents
hip measurement two fingers a charade and a code,
in which we find how blithe the trostle sings!
and please remain calm,
and heaven and earth shall pass away,
but not pi, that won't happen,
it still has an okay five,
and quite a fine eight,
and all but final seven,
prodding and prodding a plodding eternity
to last.

图 1 由 Wislawa Szymborska 创作的 "PI" 诗

1) 这部 2013 年的电影可见于 `http://www.youtube.com/watch?v=Vp9zLbIE8zo`.—— 原注

2) 一个全面的圆周率日的讲解存放在 `http://www.carma.newcastle.edu.au/jon/piday.pdf`.—— 原注

3) 也可参见 [12, Irving Kaplansky's "A song about Pi."].—— 原注

诺贝尔文学奖的波兰诗人 Wislawa Szymborska (1923—2012) 创作的 [29, p. 174]. 在图 2 中我们展示了颇具影响力的英国歌手兼歌曲作者 Kate Bush 创作的 "Pi" 的歌词 [18]. 这首歌出现在她 2005 年的专辑《空中 (Aerial)》中. 观察员在对这张专辑的回顾中写道它是 "一首感伤的对数学家的颂歌，创作的题材及其处理均呈大胆. 副歌将此数唱到了小数点后很多很多位."[1)]

Sweet and gentle sensitive man
With an obsessive nature and deep fascination
For numbers
And a complete infatuation with the calculation
Of PI

Oh he love, he love, he love
He does love his numbers
And they run, they run, they run him
In a great big circle
In a circle of infinity

3.1415926535 897932
3846 264 338 3279

Oh he love, he love, he love
He does love his numbers
And they run, they run, they run him
In a great big circle
In a circle of infinity
But he must, he must, he must
Put a number to it

50288419 716939937510
582319749 44 59230781
6406286208 821 4808651 32

Oh he love, he love, he love
He does love his numbers
And they run, they run, they run him
In a great big circle
In a circle of infinity

82306647 0938446095 505 8223...

图 2 由 Kate Bush 创作的 "Pi" 歌曲

2. 前数字时代的历史

π 可以说是仅有的历史十分悠久而至今仍在研究的数学课题. 巴比伦人使用近似 $\pi \approx 3$. 大约公元前 1650 年的埃及莱因德 (Rhind) 纸草书认为 $\pi = 32/18 = 3.16049\ldots$. 早期的印度数学家相信 $\pi = \sqrt{10} = 3.162277\ldots$. Archimedes (阿基米德) 在第一次严格的数学计算中，应用了一个聪明的内接和外切多边形的迭代构造确立了

$$3\frac{10}{71} = 3.14084\ldots < \pi < 3\frac{1}{7} = 3.14285\ldots$$

George Phillips 愉悦地讲述了这项没有用三角学或浮点运算来完成的惊人的工作 [12, Entry 4].

a. 现代算术出现之后的境况

现代从零开始的 10 进小数算术，最有可能出现于公元 5 世纪前的印度 [4, 27], 它大大减轻了计算量. 尽管现在众所周知的印度 - 阿拉伯系统于 10 世纪被 Gerbert of Aurillac

1) 她唱了超过 150 位数字，但在第 50 位后发生了错误. 而出版的歌词给出了正确的数字.—— 原注

(奥里亚克的热尔贝) (946—1003, 在 999 年成为教皇 Sylvester (西尔维斯特) 二世) 第一次引入到欧洲，又在 13 世纪早期被 Fibonacci (斐波那契) 更详细和更成功地引入，欧洲人对它的采用却很缓慢，这阻碍了科学和贸易的发展. 16 世纪，在小数运算被普遍接受之前，一个富有的德国商人在考虑他儿子的大学规划时被这样劝告："如果你只想让他能应对加减法，那么任何的法国和德国大学都可以做到. 但如果你决心要让你的儿子继续应对乘法与除法 —— 假设他有足够的天资 —— 那么你必须送他去意大利." [24, p. 577]

b. 微积分出现之后的境况

在具备了 10 进小数运算和现代微积分的工具后, 17, 18 和 19 世纪的数学家自信地计算了 π. Newton (牛顿) 在 1665 年记录了 16 位数字，但他在后来承认"我惭愧地告诉你们我在这些计算中费了多大的力气，那时候我没有功夫做其他的事." 1844 年，Dase (达泽)[1] 在 Strassnitzky[2] 的指导下计算了 212 位数字 (与表 1 中数据不一致 —— 校注), 他自认为这一计算结果是正确的 [14]. 这些努力被 William Shanks (尚克斯) (1812—1882) 达到巅峰，他利用了 *John Machin* 公式 (其中 $\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + x^9/9 - \cdots$)

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right), \tag{1}$$

表 1 20 世纪前计算 π 的简要纪事

Archimedes	公元前 250?	3	3.1418 (平均值)
刘徽	263	5	3.14159
祖冲之	480?	7	3.1415926
Al-Kashi	1429	14	
Romanus	1593	15	
Van Ceulen	1615	39	(35 位正确)
Newton	1665	16	
Sharp	1699	71	
Machin (梅钦)	1706	100	
De Lagny (拉尼)	1719	127	(112 位正确)
Vega (费加)	1794	140	
Rutherford	1824	208	(152 位正确)
Strassnitzky 和 Dase	1844	200	
Rutherford	1853	440	
Shanks	1853	607	(527 位正确)
Shanks	1873	707	(527 位正确)

1) 全名 Johann Martin Zacharias Dase, 1824—1861, 曾为德国心算神童. 他可用不到 6 分钟时间心算两个 20 位数的乘法，不到 40 分钟时间心算两个 40 位数的乘法，…. 但他只有极少的数学知识，并且学不进数学. 数学家 J. Petersen 曾教他一些欧几里得定理，但最终因认识到这不是 Dase 能力所及而放弃了. Dase 计算 π 获得前 212 位正确数字用了不到两个月的时间.—— 校注

2) 全名 Leopold Karl Schulz von Strassnitzky, 1803—1852, 德国数学家. 公式 $\pi/4 = \arctan^{-1} 2 + \arctan^{-1} 5 + \arctan^{-1} 8$ 被冠以其名, Dase 即利用这个公式算得 π 的前 212 位正确数字的.—— 校注

于 1874 年计算了 707 位数字. 他在 1853 年计算到 607 位的工作是由 30 份订阅款来提供资金的, 这些订阅来自像 Rutherford (卢瑟福), De Morgan (德摩根) (两份), Herschel (皇家铸币厂的主管官员, 天文学家的儿子) 和 Airy (艾里) 这样的权贵.[1)]

唉, 仅有 527 位数字是正确的 (由 Ferguson 使用计算器在近一个世纪后的 1946 年发现), 这证实了 De Morgan 那时的怀疑, 他断言 Shanks 的出版结果中有太多的 7 (尽管统计偏差没有像 De Morgan 所认为的那样有说服力 [26]). 表 1 给出了这段历史的一个小结. 我们注意到 Sharp (夏普) 是一个牧师, Ferguson 是一位学校老师, 而 Dase 是一位"心算师". 许多关于这段历史的原始文献可以在 [12] 中找到.

c. 圆周率的数学

在这些数值方面发展的同时, π 背后的数学也在经历具有可比性的发展. 1761 年, Lambert (兰伯特) [12, Entry 20] 使用反常 (improper) 连分数证明了 π 是无理数, 从而确定了 π 的数字不会重复. 接下来在 1882 年, Lindemann (林德曼) [12, Entry 22] 证明了对于每个非零的代数数 α, e^{α} 是超越数, 这可立即推出 π 是超越数 (因为 $e^{i\pi}=-1$). 这一结果决定性地解决了一个有 2000 年历史的老问题, 即能否使用尺规作图得到一个正方形使其与一个圆具有相同的面积 (不可能, 因为如果可以的话, π 会是一个几何上的 可构成 (constructible) 数, 从而是代数数).

3. 20 世纪及之后

随着上世纪五六十年代计算机技术的发展, 在执行高精度计算的新算法的辅助下, π 被计算到了千位数字, 值得注意的是快速 Fourier (傅里叶) 变换的使用显著地加速了乘法.

a. $1/\pi$ 的 Ramanujan (拉马努金) 型级数

更重要的是, π 的计算开始利用一些全新的数学, 比如 Ramanujan 1914 年的公式

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}, \tag{2}$$

其每项都会在结果中产生额外的 8 个正确数字 [16]. David (达维德) 和 Gregory Chudnovsky 应用了变形

$$\frac{1}{\pi}=12\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(6k)!(13591409+545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}}, \tag{3}$$

其每项会增加 14 个正确数字. 这两个公式都依赖于相当深刻的数论 [14] 和相关的模函数理论 [16].

b. 对 $1/\pi$ 的降低复杂性的算法 [17]

上世纪 70 年代中期的另一个关键的发展是对于 π 的 *Salamin-Brent* 算法 [12, Entries 46 和 47]: 令 $a_0=1$, $b_0=1/\sqrt{2}$ 和 $s_0=1/2$. 则对 $k\geq 1$ 做迭代

$$a_k=\frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2},\ b_k=\sqrt{a_{k-1}b_{k-1}},\ c_k=a_k^2-b_k^2,\ s_k=s_{k-1}-2^k c_k,\ p_k=\frac{2a_k^2}{s_k}. \tag{4}$$

1) 他原本打算仅出版大约 500 位, 而当几个月后完成校样时明显增加了额外的数字 [12, Entry 20]. 匆忙出版中产生的错误并不鲜见.—— 原注

p_k 的值 二阶 收敛于 π—— 每次迭代大约使正确数字的数目增加一倍.

受到 Ramanujan 1914 年一篇文章的启发, 1986 年本文作者 1) 和 Peter Borwein 发现了一个相关的算法 [16]: 令 $a_0 = 6 - 4\sqrt{2}$ 和 $y_0 = \sqrt{2} - 1$. 则对 $k \geq 0$ 做迭代

$$y_{k+1} = \frac{1-(1-y_k^4)^{1/4}}{1+(1+y_k^4)^{1/4}}, \quad a_{k+1} = a_k(1+y_{k+1})^4 - 2^{2k+3}y_{k+1}(1+y_{k+1}+y_{k+1}^2). \tag{5}$$

则 a_k 四阶 收敛于 $1/\pi$—— 每次迭代大约使正确数字数量乘以 4. 仅 21 次迭代就能产生一个与 π 有超过六万亿 (6 trillion)2) 个数字相同的代数数 (假设所有迭代都执行此精度).

随着像这样的一些发现, 连同计算机硬件中惊人的进步 (多亏了 *Moore* (摩尔)定律3) 以及对并行机制的聪明使用, π 被计算至数百万位, 然后计算至数十亿位, 以及在 2011 年, 计算至 十万亿 小数位数. 表 2 是一个在计算机时代计算 π 的简要纪事. 4)

表 2 计算机时代计算 π 的简要纪事

Ferguson	1945	620
Smith 和 Wrench	1949	1,120
Reitwiesner 等 (ENIAC)	1949	2,037
Guilloud	1959	16,167
Shanks 和 Wrench	1961	100,265
Guilloud 和 Bouyer	1973	1,001,250
Kanada, Yoshino 和 Tamura	1982	16,777,206
Gosper (戈斯珀)	1985	17,526,200
Bailey (贝利)	1 月 1986	29,360,111
Kanada 和 Tamura	1 月 1988	201,326,551
Kanada 和 Tamura	11 月 1989	1,073,741,799
David 和 Gregory Chudnovsky	8 月 1991	2,260,000,000
Kanada 和 Takahashi	4 月 1999	51,539,600,000
Kanada 和 Takahashi	9 月 1999	206,158,430,000
Kanada 和另外 9 位合作者	11 月 2002	1,241,100,000,000
Bellard	12 月 2009	2,699,999,990,000
Kondo 和 Yee (余智恒)	8 月 2010	5,000,000,000,000
Kondo 和 余智恒	10 月 2011	10,000,000,000,000

4. 在任意起始位置计算 π 的数字

最近一次让人产生 π 被完全了解这一愚蠢想法的是, 1996 年产生了一个计算 π 的

1) 原文误为 "one of us", 即作者之一.—— 校注

2) trillion 的含义在美国和英法德是不一致的. 对前者而言, 1 trillion= 10^{12}, 而对后者, 1 trillion= 10^{18}. 译文 "六万亿" 及下文中的 "十万亿"、"四万亿" 是按美国方式计算的.—— 校注

3) Moore 定律是由 Intel 公司创始人之一的 Gordon Moore 在 1970 年前后提出来的. 其内容为: 集成电路上可容纳的电晶体数目, 约每隔 24 个月便会增加一倍.—— 校注

4) 或许不必指出, 此表中的 Shanks 不是表 1 中的 Shanks.—— 原注

二进制或 16 进制数字的简单计划，这样的计算开始于任意起始位置而不用计算前面的数字. 这一计划基于下面的公式，它是由一个实现 Ferguson 的 "PSLQ" 算法的 计算机程序所发现 的 [9, 20]:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k}\left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6}\right). \tag{6}$$

这个公式 (现被称为 π 的 "BBP" 公式)[1] 的证明是一个相对简单的微积分练习. 或许令人费解的是它没有在数世纪前被人发现. 但那时没有人寻求这样一个公式.

a. 位是如何提取的

要解释从任意起始位置的开始计算 π 的计划，最好的例子是考虑 $\log 2$ 的类似的 (并且众所周知的) 公式:

$$\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}. \tag{7}$$

注意到始于 $d+1$ 位的 $\log 2$ 的二进制展开仅为 $2^d \log 2$ 的小数部分，以至于我们可以写作 (其中 $\{x\}$ 代表 x 的小数部分):

$$\{2^d \log 2\} = \left\{\left\{\sum_{k=1}^{d} \frac{2^{d-k} \bmod k}{k}\right\} + \left\{\sum_{k=d+1}^{\infty} \frac{2^{d-k}}{k}\right\}\right\}. \tag{8}$$

现在注意到第一个和式的分子可通过求幂运算的二进制算法快速地计算，即观察，比如，$3^{17} \bmod 10 = ((((3^2 \bmod 10)^2 \bmod 10)^2 \bmod 10)^2 \bmod 10) \cdot 3 \bmod 10$. 通过使用 (6), 可用相同的方法来计算 π 的二进制或 16 进制数字.

该计划已被执行，用来从极高的位置开始计算 π 的 16 进制数字. 比如，2010 年 7 月，雅虎云计算的 Tsz-Wo Sze (施子和) 计算了 π 的从第 2.5×10^{14} 位开始的基-16 的数字. 之后在 2013 年 3 月 14 日 (圆周率日)，圣塔克拉拉 (Santa Clara) 大学的 Ed Karrels 计算了始于第一千万亿位的 26 个基-16 的数字 [25]. 他的结果为：8353CB3F7F0C9ACCFA9AA215F2.[2]

b. 超越实用

当然，在实际的科学或工程工作中不需要将 π 计算至数百万或数十亿数字. 一个精确到 40 位数的 π 值对于将银河系的周长计算至误差小于质子的大小已绰绰有余. 某些科学计算要求将中间的计算执行至高于标准的 16 位精确度 (典型的会要求 32 位或 64 位) [3], 而实验数学领域中的某些计算要求精确度高达 50,000 位 [6], 但我们还不知道超过这个水平的 "实际" 应用.

但是，圆周率的数字的计算对于计算机的完整性是一个极好的测试 —— 即使单一的错误出现在一个庞大的计算中，最后结果也几乎必然会是错误的，这将导致使用不同的算法的验算出现分歧. 比如，1986 年，一对使用 (4) 和 (5) 的计算 π 的程序探测出了最

1) 这个求和公式是在 1995 年由 Simon Plouffe 提出的，并以公布这个公式的论文作者 David H. Bailey, Peter Borwein 和 Simon Plouffe 3 人的名字命名. 在论文发表之前，Plouffe 已将此公式在他的网站上公布了. 这个公式的发现震惊了数学界. 数百年来，求出 π 的第 n 位小数而不求出它的前 $n-1$ 位曾被认为是不可能的.—— 校注

2) 在 16 进制中，0, 1, 2, ..., 9 仍表示 0, 1, 2, ..., 9; 用 A, B, C, ..., F 分别表示 10, 11, 12, ..., 15.—— 校注

初的 Cray-2 超级计算机之一的一些难解的硬件问题.[1] 并且，在现代计算机体系结构上高效地执行快速 Fourier 变换的一些早期研究源于对 π 的计算进行加速的工作 [2].

5. 探索正规性及相关性质的新技术

给定一个整数 $b \geq 2$, 实数 α 被称为 b–正规的 (b-normal), 或 基于 b 正规的 (normal base b), 如果每个长为 m 的基–b 的数字串以极限频率 $1/b^m$ 出现在 α 的基–b 展开中. 通过测度论容易证明，几乎所有实数对每个 $b \geq 2$ 均是 b–正规的 (此条件被称为 绝对正规性 (absolute normality)), 但对特定的数确立其正规性已被证明是非常困难的.

特别地，还没有人能对任何一个整数 b 来确定 π 是 b–正规的，更不用说同时对于所有的基确立这一点. 这个有趣的数学问题是古往今来首屈一指的范例，它既吸引了无数的学龄儿童也吸引了专业的数学家，但直到现在仍没有明确的答案. 对于任何一个特定的基的证明不仅会在世界范围内引起极大的兴趣，而且作为一个可被证明有效的伪随机数发生器也会存在潜在的实际应用. 这样的未知也延伸至其他经典的数学常数，包括 e, $\log 2$, $\sqrt{2}$, 和 γ (Euler (欧拉) 常数). Borel (博雷尔) 猜想所有的代数无理数均是绝对正规的，但是，甚至还没有在一个单一的例子中对任意的基证明这个猜想是成立的.

有两个正规性被确立的例子是可被证明为 10–正规的 Champernowne 数 C_{10} 和可被证明为 2–正规的 Stoneham 数 $\alpha_{2,3}$: $C_{10} = 0.12345678910111213\ldots$ (通过把正整数连在一起而构造), $\alpha_{2,3} = \sum_{k\geq 0} 1/(3^k 2^{3^k})$ —— 见下文 [10, 11, 28]. 对代数数的一个相对较弱的结果是, D 次代数数 α 的二进制展开中的 1 的数目必超过 $Cn^{1/D}$, 这对所有充分大的 n 和依赖于 α 的一个正数 C 成立 [8]. 所以，比如，$\sqrt{2}$ 的二进制展开的最初 n 位中 1 的数目必超过 $\sqrt{n}$.

尽管存在着这些有趣的发展，但是显然，在取得重大进展之前，对于 π 或者其他著名的数学常数，解决正规性的问题需要更强大的技术. 沿着这条路线，现代计算机技术给出了几条研究途径.

a. 统计分析

一条途径是对 π 的数字简单地执行大规模的统计分析，就像自有 ENIAC[2] 以来，在某种程度上，对几乎所有的计算所做的那样. 比如在 [7] 中，作者使用一个 Poisson (泊松) 过程模型凭经验测试了 π 最初的大约四万亿位 16 进制 (基–16) 数字的正规性，并得出结论，根据这一测试，π 不是 16–正规的这一论断是 “极不可能的” (当然，此结果不能伪装成一个证明).

b. 图形表示法

另一个富有成效的方法是把 π 或其他常数的数字当作随机游动用图来表示 [1]. 例如，图 3 呈现了基于一百万个基–4 的伪随机数字的一个游动，此图在每一步会向东、北、

1) Cray 自己的测试没有发现这些错误. 此后，这些 π 算法被包含于 Cray 在工厂的测试套件中. —— 原注

2) ENIAC, Electronic Numerical Integrator And Computer (电子数值积分计算机) 的缩写，是世界上第一台通用电子计算机. 它是 Turing 完全的电子计算机，能够重新编程，解决各种计算问题. —— 校注

西或南移动一个单位，其方向取决于那一位置的伪随机迭代是否为 0, 1, 2, 或者 3. 颜色指示游动的路径 —— 依照 HSV 方案来上移谱 (红 – 橙 – 黄 – 绿 – 青 – 蓝 – 紫 – 红)，其中 S 和 V 等于 1. HSV (色调 (hue)，饱和度 (saturation)，和亮度 (value)) 模型是一个产生彩虹似的颜色范围的圆柱坐标表示.

图 3 一个均匀的伪随机游动

图 4 展示了基于 π 最初的一千亿个基–4 数字的一个游动. 可以在网络上更详细地动态地观看，网址是 `http://gigapan.org/gigapans/106803`，全尺寸图像的分辨率为 372,224×290,218 像素 (总共 1080.3 亿像素). 这是有史以来最大的数学图像之一，并且不用说，产生此图像并非易事 [1].

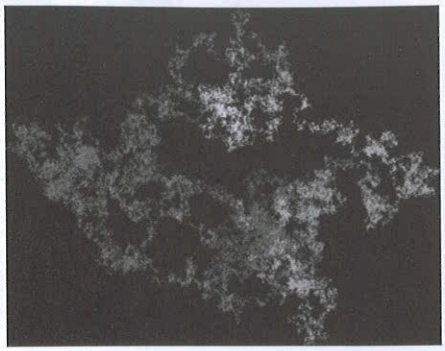

图 4 π 最初的 1000 亿个基–4 数字的游动

尽管并没有关于 π 的正规性的明确推论可从这些图中得出，但看似合理的是，π 是 4–正规的 (因而是 2–正规的)，因为它的图像与伪随机生成的基–4 数字的图像整体看来是相似的.

c. Champernowne 数

我们应该强调的是正规性的概念事实上是随机性的一个多么弱的替代. 基–b 的 *Champernowne* 数 C_b，其形成是通过连接以 b 为基的自然数来作为以 b 为基的浮点数. 它是被证明为正规却不能通过更强的正规性测试的第一类数 [1]. 由此，

$$C_b := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sum_{m=b^{k-1}}^{b^k-1} m b^{-k[m-(b^{k-1}-1)]}}{b\sum_{m=0}^{k-1} m(b-1)b^{m-1}},$$
$$C_{10} = 0.123456789101112\ldots,$$
$$C_4 = 0.1231011121320212223\ldots_4. \tag{9}$$

图 5 Champernowne 的基–4 数字的游动

在图 5 中，我们展示了正规数的游动离随机会有多远 —— 可画图描绘或者通过许多数量测定来得到，这里是用 C_4 来例举说明的.[1)]

d. Stoneham 数

这一相同的工具可被用于研究 Stoneham 常数的数字，即

$$\alpha_{2,3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k 2^{3^k}}. \tag{10}$$

1) 下标 4 代表基–4 的表示.—— 原注

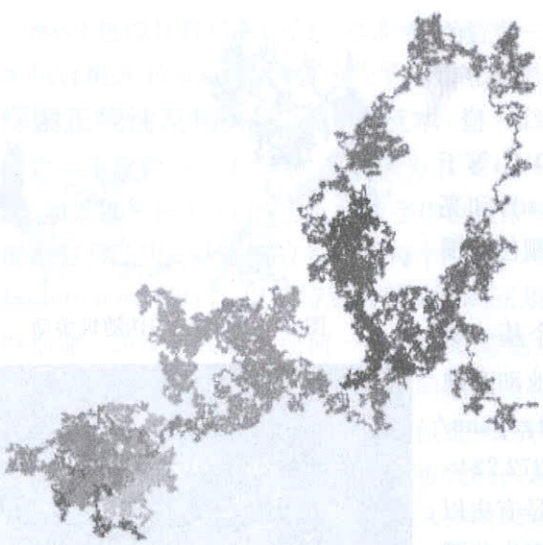

图 6 Stoneham 常数 ($\alpha_{2,3}$) 的基-3 数字的游动

图 7 可被证明为基-4 正规的 Stoneham 常数 ($\alpha_{2,3}$) 数字的游动

图 8 非正规的 Stoneham 常数 ($\alpha_{2,3}$) 的基-6 数字的游动

它是少数几个可被证明为 2-正规的常数之一 (因此对于每个正整数 n, 是 2^n-正规的) [10, 11, 28]. 更重要的是, 它被证明 不是 6-正规的, 以至于它是一个明确的例子印证了这样一个事实, 关于一个基的正规性不蕴含关于另一个基的正规性 [5]. 对于其他的基底, 包括基底 3, 其正规性还是未知的.

图 6, 图 7 和图 8 呈现了分别由 $\alpha_{2,3}$ 的基-3, 基-4 和基-6 的数字展开生成的游动. 基-4 数字图是采用与上述相同的方法来绘制的, 其每一步依据数字是否为 0, 1, 2 或 3 而移向东、北、西或南. 基-3 的图是相应于 0, 1 或 2 分别以 0, $\pi/3$ 或 $2\pi/3$ 的角度移动单位距离而生成的. 类似地, 基-6 的图是通过以 $k\pi/6$, $k=0,1,\ldots,5$ 的角度移动单位距离而生成的.

在这 3 个图中, 显然基-3 和基-4 的图似乎是合理的随机 (因为它们在整体结构上与图 3 和 4 是相似的), 而基-6 的游动是截然不同的, 它的大部分是一条水平线. 的确, 我们通过对基-6 数字进行类似的经验性分析发现 $\alpha_{2,3}$ 不是 6-正规的 —— 这一基-6 展开中有一长段的零 [5]. [1] 中对于包括 π 在内的大量 "人造的" 和 "自然的" 常数给出了这种类型的结果.

这样的结果当然不能替代正式的证明, 但就像我们所看到的那样, 它们的确常常戏剧式地令人想到某个常数不是正规的, 并且还可进一步用来给随机性的统计数据划界. 比如, 在正规 Stoneham 数中发现了显著的结构 [1]. 此外, 已有许多相关的随机游动的定量度量和其他的图形表示被检测. 许多相关信息, 包括动画, 储存在 `http://carma.newcastle.edu.au/walks/`.

6. 其他未回答的问题

a. 数学问题

当然, 关于 π, 还可以提出许多其他的未回答的数学问题.

1. π 的连分数项是有界还是无界的？连分数展开可以提供关于 π 能在多大的精确度上被写成分数形式的信息.
2. π 的二进制展开中零的极限比例是否恰为 1/2？其 10 进制展开中零的极限比例是否恰为 1/10？甚至对于像 $\sqrt{2}$ 这样的简单的代数常数，我们都不知道这些问题的答案，更不用说 π 了.
3. π 的 3 进制展开中是否有无穷多个 1？π 的 10 进制展开中是否有无穷多个 7？令人遗憾的是，我们还不能以这样或那样的方式来决定性地回答这些基本的问题.

b. 元数学的问题

即使只从表面上来看，关于这一点，也有许多值得提的历史问题.

1. 为什么 π 在古代没有被了解得更精确？本可以通过用绳子更仔细地度量而得到至少两个数字的精确度.
2. 尽管 Archimedes 拥有几何和计算上惊人的才华，为什么他没有掌握基于零的 10 进制运算的概念？这本该会极大地帮助他的计算 (也可能本该会改变历史).
3. 为什么印度数学家没能将他们对于整数的 10 进制运算体系延伸至 10 进制小数？10 进制小数的概念首先出现于 12 世纪的阿拉伯世界. 他们扩展了自己的成果，但错过了明显的一步.
4. 为什么 Gauss 和 Ramanujan 没能开拓他们各自的 π 恒等式？毕竟，π 的 Salamin-Brent 二次收敛算法是直接从一些 Gauss 恒等式，以及由 Ramanujan 公式 (那时候很大程度上未被验证) 得出的 π 的其他一些算法导出的. 就此而言，为什么在我们的计算机时代如此根本的算法的概念，对于他们的思维方式是那样的陌生？
5. 为什么数世纪以来的数学家没能找到 π 的 BBP 公式，即公式 (6)，也没有提到从任意起始位置计算数字的相关 "技巧"？毕竟，如前面所提到的，这个公式可用大一水平的微积分仅仅几步就能被证明.

无论怎样，现代计算机技术显然改变了 π 的竞赛. 当现在的作者开始他们的职业生涯时，现代系统在速度和容量上会毫不夸张地数十亿倍地优于他们的前辈当时的系统，并且就像硬件的改进一样，软件的发展 (比如针对高精确度数值计算的快速 Fourier 变换和针对代数运算的符号计算能力) 也提高了计算效率.

计算机不再仅仅是被动的创造物. 计算机程序发现了 π 的 BBP 公式，以及许多其他常数的类似公式. 利用以高精确度执行 PSLQ 算法或者相关的整数关系算法，计算机也以类似的方式发现了 π 的其他公式.

c. 两个未证明的事实

在某些情形中，比如下面两个公式，证明仍是难以捉摸的：

$$\frac{4}{\pi^3} \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^7(k)(1+14k+76k^2+168k^3)}{8^{2k+1}}, \tag{11}$$

$$\frac{2048}{\pi^4} \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{4})_k(\frac{1}{2})_k^7(\frac{3}{4})_k}{(1)_k^9 2^{12k}}(21+466k+4340k^2+20632k^3+43680k^4), \tag{12}$$

在第 1 个公式 (Goulevich 2001 年的工作) 中，$r(k) = 1/2 \cdot 3/4 \cdots (2k-1)/(2k)$，在第 2 个公式 (Cullen 2010 年的工作) 中，记号 $(x)_n = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$[1] 是 *Pochhammer* 符号.

7. 结论

几千年来，数学常数 π 既激发了公众的兴趣，也激发了专业数学家的兴趣. 关于 π 的无数事实已被发现并出版于数学文献中. 但是，就像我们所看到的那样，误解随处可见. 我们必须警醒无知的读者小心数学恐怖主义者，他们伪装成好人企图将 π 替换为 $\tau = 2\pi$ (这在任何情况下都是毫无意义的，因为 τ 的二进制展开与 π 相同，除了小数点的移动).[2]

但是仍有非常基本的问题未被回答，其中就有对任何的基，π 是否 (和为什么) 是正规的. 事实上，为什么用来计算像 π 这样的常数的基本算法会产生看起来如此随机的结果？我们是否可以好好利用这些产生随机性的特征，例如制造具有商业品质的伪随机数生成器？

其他的挑战也仍然存在. 但是计算机的出现也许会最终给人类以力量来回答其中的一些问题. 计算机有一天会比人类数学家更聪明吗？短时间内可能不会，至少目前它们还是非常令人愉快的研究助理.

致谢 (略)

参考文献

[1] F. J. Aragón Artacho, D. H. Bailey, J. M. Borwein, P. B. Borwein, Walking on real numbers, Mathematical Intelligencer 35 (2013) 42–60.

[2] D. H. Bailey, FFTs in external or hierarchical memory, Journal of Supercomputing 4 (1990) 23–35.

[3] D. H. Bailey, R. Barrio, J. M. Borwein, High precision computation: Mathematical physics and dynamics, Applied Mathematics and Computation 218 (2012) 10106–10121, available at http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2012.03.087.

[4] D. H. Bailey, J. M. Borwein, Ancient Indian square roots: An exercise in forensic paleo-mathematics, Amer. Math. Monthly 119 (2012) 646–657.

[5] ——, Nonnormality of Stoneham constants, Ramanujan Journal 29 (2012) 409–422, available at http://dx.doi.org/10.1007/s11139-012-9417-3.

[6] D. H. Bailey, J. M. Borwein, R. E. Crandall, J. Zucker, Lattice sums arising from the Poisson equation, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 46 (2013) 115–201.

[7] D. H. Bailey, J. M. Borwein, C. S. Calude, M. J. Dinneen, M. Dumitrescu, A. Yee, An empirical approach to the normality of pi, Experimental Mathematics 21 no. 4 (2012) 375–384.

[8] D. H. Bailey, J. M. Borwein, R. E. Crandall, C. Pomerance, On the binary expansions of algebraic numbers, Journal of Number Theory Bordeaux 16 (2004) 487–518.

[9] D. H. Bailey, P. B. Borwein, S. Plouffe, On the rapid computation of various polylogarithmic constants, Mathematics of Computation 66 (1997) 903–913, available at http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-97-00856-9.

1) 原文将式中 $(x+2)$ 误为 $(x+1)$.—— 校注

2) 参见 http://tauday.com/ 和 www.pbs.org/newshour/rundown/2013/03/for-the-love-of-pi-and-the-tao-of-tau.html.—— 原注

[10] D. H. Bailey, R. E. Crandall, Random generators and normal numbers, Experimental Mathematics 11 (2002) 527–546, available at http://dx.doi.org/10.1080/10586458.2002.10504704.

[11] D. H. Bailey, M. Misiurewicz, A strong hot spot theorem, Proceedings of the American Mathematical Society 134 (2006) 2495–2501, available at http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-06-08551-0.

[12] L. Berggren, J. M. Borwein, P. B. Borwein, A Sourcebook on Pi. Third edition. Springer, New York, 2004.

[13] B. Bolt, More Mathematical Activities: A Further Resource Book for Teachers. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[14] J. M. Borwein, The Life of Pi, extended and updated version of "La vita di pi greco," volume 2 of Mathematics and Culture, La matematica: Problemi e teoremi, Guilio Einaudi Editori, Turino, Italian, 2008. (French, in press). 532–561, in From Alexandria Through Baghdad: Surveys and Studies in the Ancient Greek and Medieval Islamic Mathematical Sciences in Honor of J. L. Berggren. Edited by N. Sidol and G. Van Brummelen. Springer, New York, 2014.

[15] J. M. Borwein, D. H. Bailey, Mathematics by Experiment: Plausible Reasoning in the 21st Century. Second expanded edition, A. K. Peters, Natick, MA, 2008.

[16] J. M. Borwein, P. B. Borwein, D. H. Bailey, Ramanujan, modular equations, and approximations to pi, or how to compute one billion digits of pi, Amer. Math. Monthly 96 (1989) 201–219.

[17] R. P. Brent, Fast multiple-precision evaluation of elementary functions, Journal of the ACM 23 (1976) 242–251, available at http://dx.doi.org/10.1145/321941.321944.

[18] Kate Bush, Aerial (Audio CD), Sony, 2005.

[19] R. Corliss, Unlocking the Matrix, Time, 12 May 2003, available at http://www.time.com/time/magazine/article/0,9171,1004809,00.html.

[20] H. R. P. Ferguson, D. H. Bailey, S. Arno, Analysis of PSLQ, an integer relation finding algorithm, Mathematics of Computation 68 (1999) 351–369, available at http://dx.doi.org/10.1090/S0025-5718-99-00995-3.

[21] The Works of Archimedes, Great Books of the Western World, Edited by R. M. Hutchins. Translated by T. L. Heath. Vol. 11, Encyclopedia Britannica, 1952. 447–451.

[22] S. Hilburn, Wife of Pi, cartoon, 8 Feb 2013, available at http://www.gocomics.com/theargylesweater/2013/02/08.

[23] House Resolution 224 (111th): Supporting the designation of Pi Day, and for other purposes, 9 Mar 2009, available at http://www.govtrack.us/congress/bills/111/hres224.

[24] G. Ifrah, The Universal History of Numbers: From Prehistory to the Invention of the Computer. Translated by David Bellos, E. F. Harding, Sophie Wood and Ian Monk, John Wiley and Sons, New York, 2000.

[25] E. Karrels, Computing digits of pi with CUDA, 14 Mar 2013, available at http://www.karrels.org/pi.

[26] G. Marsaglia, On the randomness of pi and other decimal expansions, 2005, available at http://interstat.statjournals.net/YEAR/2005/articles/0510005.pdf.

[27] K. Plofker, Mathematics in India. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009.

[28] R. Stoneham, On absolute (j, ε)-normality in the rational fractions with applications to normal numbers, Acta Arithmetica 22 (1973) 277–286.

[29] W. Symborska, PI, Poems, New and Collected, 1957–1997. Houghton Mifflin Harcourt, Boston, 2000.

(江怡 译　陆柱家 校)